La quantité de mouvement

1. Quantité de mouvement
    1. Sa conservation pour système fermé
    2. Sa variation : l’impulsion
2. Systèmes ouvertes : fusé

Equations différentielles I

L'équation de mouvement nous donne l'accélération en fonction du temps. Pour déterminer la vitesse, puis la position, il faut résoudre une équation différentielle :

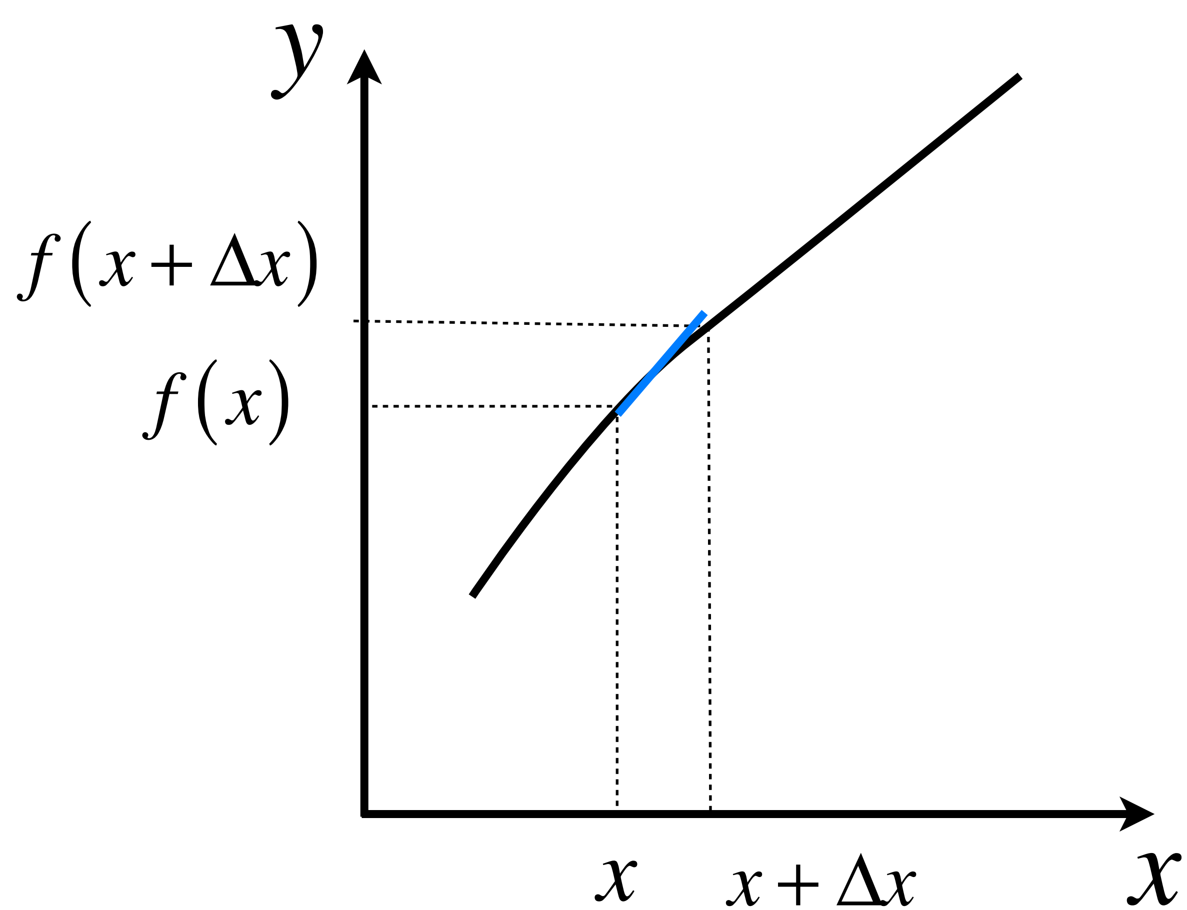
$$m\frac{dv}{dt} = -bv$$

$$dv = -\frac{b}{m}v\,dt$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}dt$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = \int_{0}^{t}-\frac{b}{m}dt$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{b}{m}t \qquad v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$



$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + \Delta x\frac{df}{dx}$$

$$\Delta f \approx \Delta x\frac{df}{dx}$$

Equations différentielles I

De nouveau, c'est une équation différentielle linéaire, de premier ordre pour la position :

$$v = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

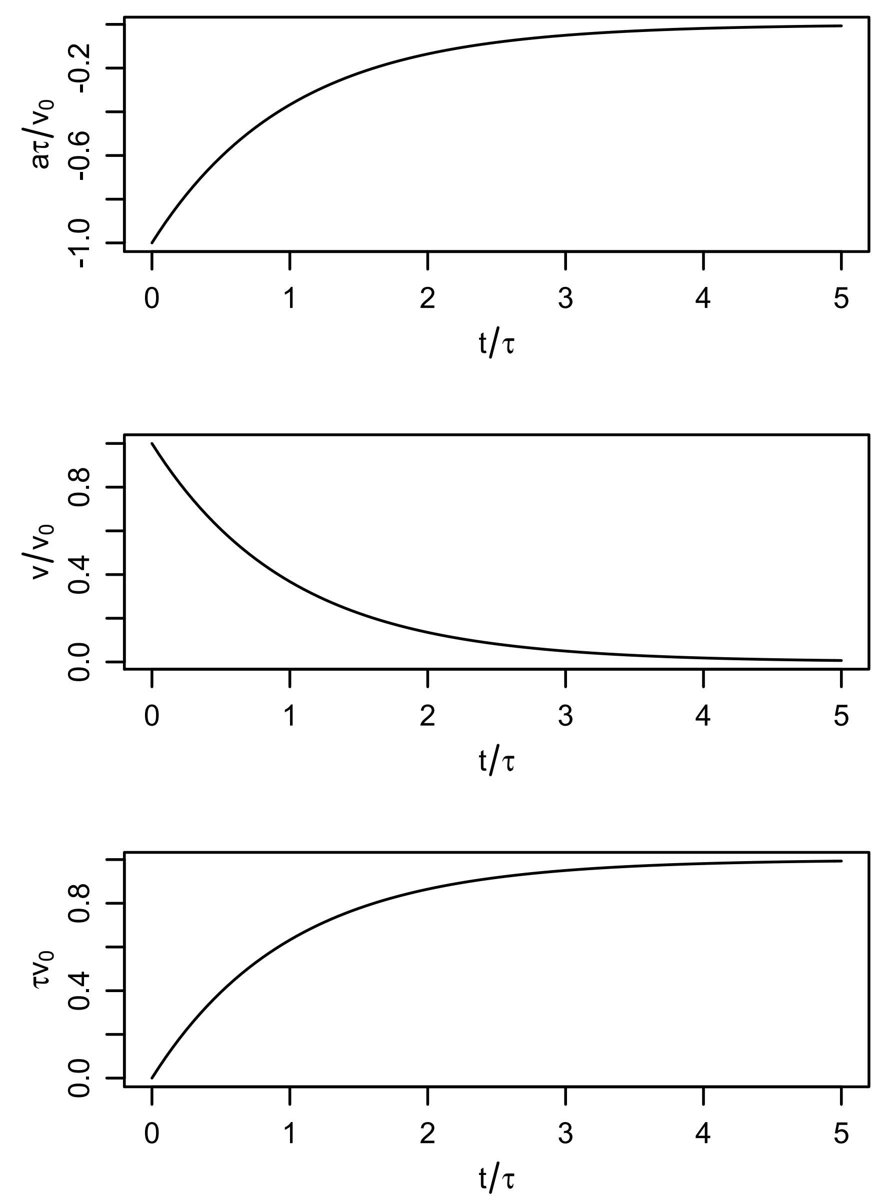
$$\frac{m}{b} = \tau$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$dx = v_0 e^{-\frac{b}{m}t} dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0 e^{-\frac{b}{m}t}\, dt$$

$$x - x_0 = \frac{m}{b} v_0 \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$



Les dessins montrent a, v et x-x_0

$$\tau := \frac{m}{b}$$

- est appelé **constant de temps**
- Echelle du temps : τ
- Echelle de la distance : la distance parcourue pendant le déplacement $d(t \to \infty) = v_0 \tau$
- Echelle de la vitesse : v_0
- Echelle de l'accélération : $a_0 = v_0 / \tau$

Les lois de Newton

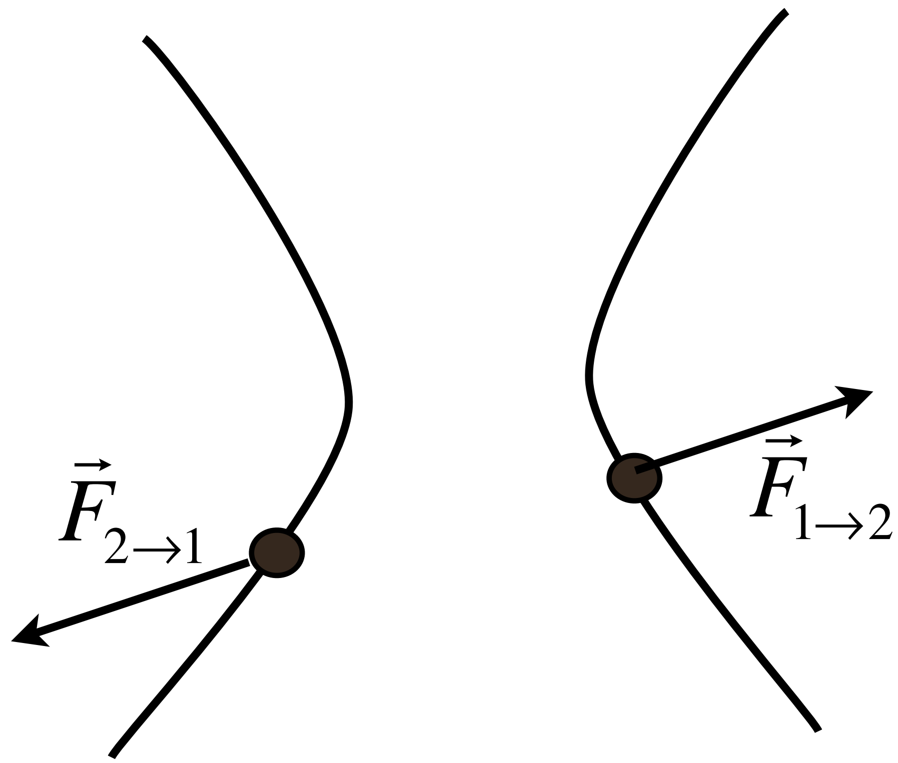
1. Il existe des référentiels dans lesquels tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, à moins qu'une force n'agisse sur lui.
2. L'accélération est proportionnelle à la force et se fait dans le sens de la force

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

3. Si un corps exerce une force sur un autre, cet autre corps exerce une force égale et opposée sur le premier:

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$$

La quantité de mouvement



$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2} \quad \forall\, t$$

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2 \quad \forall\, t$$

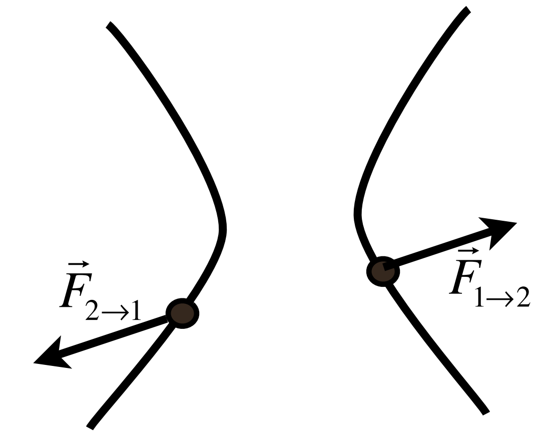
$$m_1 d\vec{v}_1 = -m_2 d\vec{v}_2$$

$$m_1 d\vec{v}_1 = -m_2 d\vec{v}_2$$

$$d\vec{p}_1 = -d\vec{p}_2$$

$$d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0$$

Système isolé

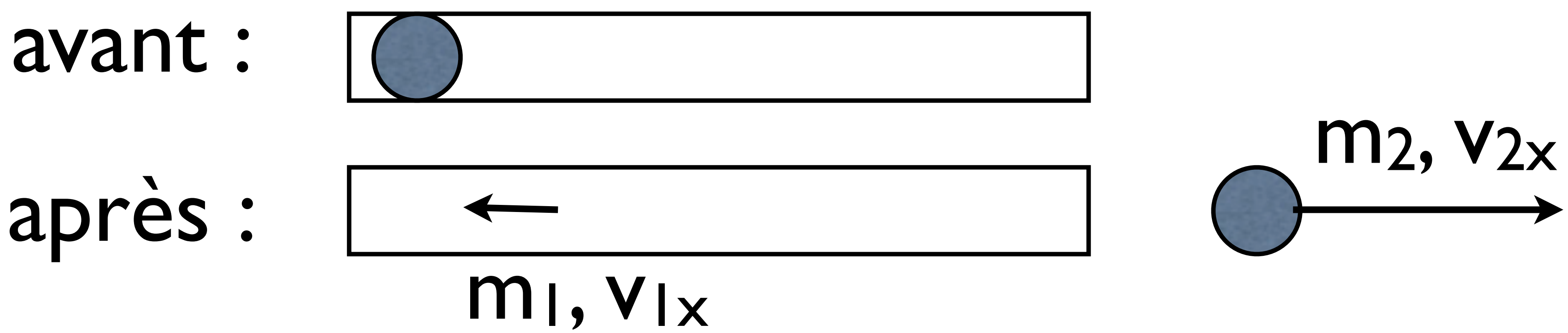


$$d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0$$

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

- si toutes les forces ont leur origine à l'intérieur du système, alors le système est isolé
- La conservation de la quantité de mouvement est indépendante de la nature des forces

Système isolé : tir



$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$p_{1ix} + p_{2ix} = p_{1fx} + p_{2fx}$$

$$p_{1iy} + p_{2iy} = p_{1fy} + p_{2fy}$$

$$p_{1iz} + p_{2iz} = p_{1fz} + p_{2fz}$$

$$v_{1ix} = v_{2ix} = 0$$

$$v_{2fx} = -v_{1fx} \frac{m_1}{m_2}$$

$$\frac{E_{1C}}{E_{2C}} = \frac{m_1}{m_2}$$

Système ouvert : l'impulsion

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$ ← Somme de toutes les forces externes

$$d\vec{p} = \vec{F}_{ext} dt$$

$$\int_{p_i}^{p_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{ext}\, dt$$

Impulsion

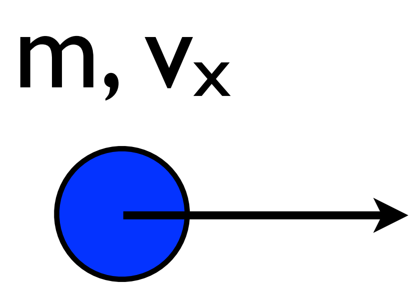
$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{I}$$

$$F_{dt} \sim {}_{F}dt$$

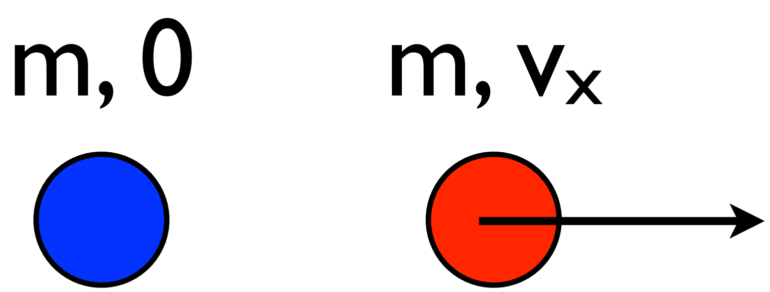
Permet souvent déterminer une force moyenne qui agit pendant Δt

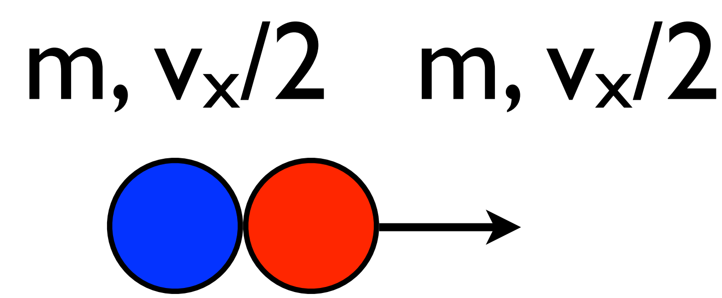
Une balle de 0,1 kg tombe d'une hauteur de 2 m, et rebondit à 1,8 m de hauteur. Calculer l'impulsion reçue de la pesanteur pendant sa chute, et l'impulsion reçue quand elle frappe le sol.

Les collisions

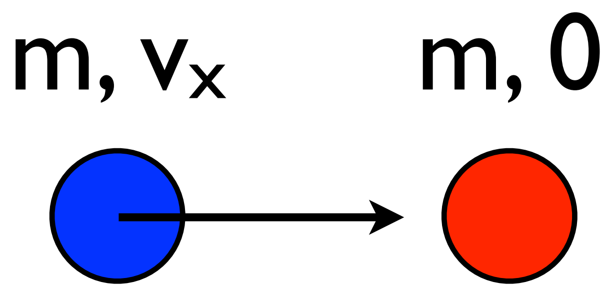


$$p_{ix} = mv + 0$$





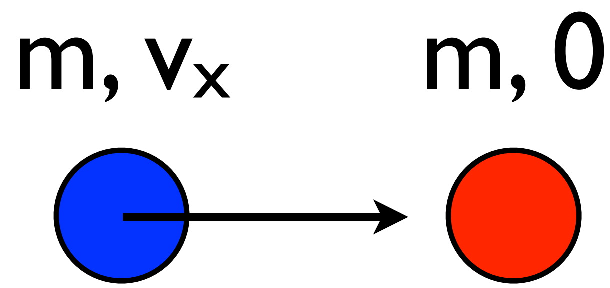
Collision élastique



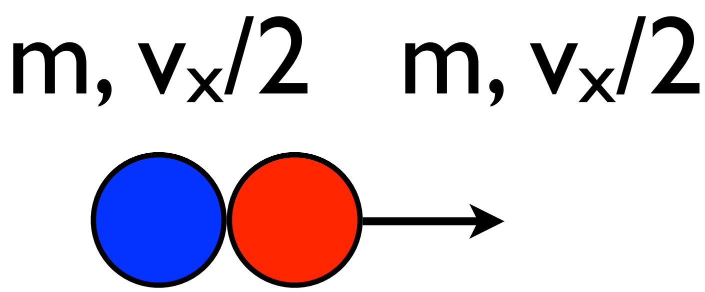
$$p_{ix} = mv + 0 \qquad E_{Ci} = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

- conservation de la quantité de mouvement (vecteur!, chaque composant)
- conservation de l'énergie mécanique

Collision inélastique



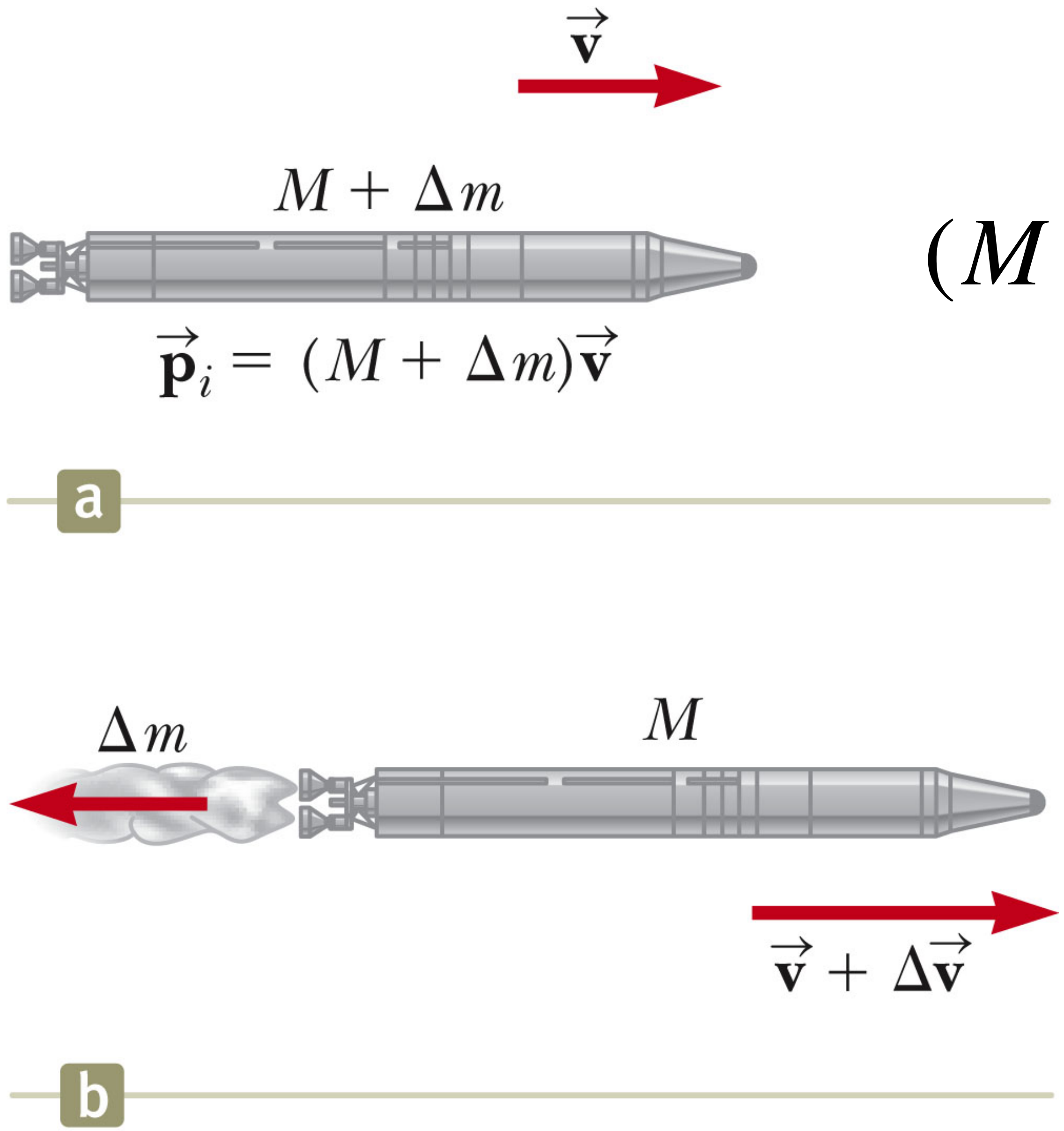
$$p_{ix} = mv + 0$$



$$p_{fx} = \frac{1}{2}mv + \frac{1}{2}mv$$

- conservation de la quantité de mouvement
- par la natur inélastique de la collision, l'énergie mécanique n'est pas conservé

Fusée



$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

$$M\Delta v = \Delta m v_e$$

$$M\Delta v = -\Delta M v_e$$

$$\Delta v = -v_e \frac{\Delta M}{M}$$

$$v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

Centre de gravité

$$\vec{r}_{cg} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\frac{d\vec{r}_{cg}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$M\vec{v}_{cg} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$M\vec{a}_{cg} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

$$M\vec{a}_{cg} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

Centre de gravité

pour un objet étendu, le centre de gravité évolue sous l’effet des forces externes comme une particule avec la masse totale du système